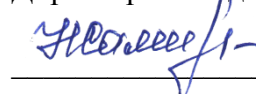


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ДАГЕСТАН
Частное профессиональное образовательное учреждение
«Республиканский полипрофессиональный колледж»

Цикловая методическая комиссия общеобразовательных дисциплин

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа



С.Р.Гаджибутаева

«01» сентября 2018 г.

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению самостоятельной работы

Специальность 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Кизляр
2018

Методические указания дисциплины «Математика» составлены:

- в соответствии с требованиями ФГОС СПО;
- на основании учебного плана направления 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

Составитель (и):

Преподаватель М.М. Омарова

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании цикловой методической комиссии общеобразовательных дисциплин от «28» августа 2018 г., протокол № 1

Председатель ЦМК:

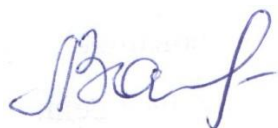
Гарунова А.А.

Методические указания согласованы:

Рецензент:

Начальник УСЗН в МО «Кизлярский район » Султанов А.А.

Библиотека:



зав. библиотеки Запорожец Л.А.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели дисциплины – прочное и сознательное овладение студентами математическими знаниями и умениями, необходимыми в практике работы специалистов среднего звена, достаточными для изучения общетехнических и специальных дисциплин и продолжения образования.

Задачи - организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Учебная дисциплина «Математика» входит в математический естественнонаучный цикл дисциплин специальности, устанавливающих базовые знания и навыки, необходимые в будущей профессиональной деятельности выпускника. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований, так и при решении конкретных практических задач в профессиональной области.

Освоение дисциплины «Информатика» необходимо для дальнейшего изучения дисциплин «Информатика» и «Информационные технологии в профессиональной деятельности».

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся **должен знать**:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы (ОК-6,9,);

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности (ОК-3,5);

- основные понятия и методы математического анализа (ОК-5),
 - дискретной математики, линейной алгебры (ОК-1,4),
 - теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики (ОК-3,6);
 - основы интегрального и дифференциального исчисления (ОК-3,5).
- уметь:**
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности (ОК-5).
- владеть:**
- навыками использования математического аппарата в деятельности менеджера по продажам (ОК.1-9).

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

РАЗДЕЛ 1. Теория пределов

Тема 1. Предел функции. Непрерывность функции.

Содержание темы

Понятие предела функции в точке и на промежутке.

Приращение аргумента и приращение функции, типы разрывов. Свойства непрерывных функций. Предел функции на бесконечности. Вычисление пределов функций. Два замечательных предела.

РАЗДЕЛ 2. Дифференциальное исчисление.

Тема 2.1. Производные функции.

Содержание темы

Определение производной функции.

Правила дифференцирования.

Производная сложной функции.

Теорема о производной обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Вторая производная и производная высшего порядка. Дифференцирование элементарных функций.

Тема 2.2. Исследование функции с помощью производных.

Содержание темы

1. Применение второй производной.

2. Асимптоты графика функции.

3. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба.

4. Общая схема исследования функции.

РАЗДЕЛ 3. Линейная алгебра

Тема 3.1. Решение систем.

Содержание темы

Понятие матрицы, виды матриц и действия с ними. Обратная матрица, решение систем методом построения обратной матрицы и по формулам Крамера.

РАЗДЕЛ 4. Интегральное исчисление

Тема 4.1 Неопределённый интеграл.

Содержание темы

1. Понятие неопределённого интеграла. Основные свойства неопределённого интеграла. Методы интегрирования (непосредственное интегрирование, введение новой переменной, интегрирование по частям).

2. Табличные интегралы.

3. Нахождение неопределённых интегралов.

Тема 4.2. Определённый интеграл.

Содержание темы

1.Понятие определённого интеграла. Основные свойства определённого интеграла. Методы вычисления определённого интеграла.
2.Приближённые методы вычисления определённого интеграла. Вычисление геометрических, механических, физических величин с помощью определённых интегралов.

РАЗДЕЛ 5. Теория комплексных чисел

Тема 5.1. Понятие комплексного числа.

Содержание темы

Понятие мнимой единицы, понятие комплексного числа,
Алгебраическая форма комплексного числа, геометрическое изображение комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа,
Переход от алгебраической к тригонометрической форме. Действия с комплексными числами

РАЗДЕЛ 6. Теория вероятности

Тема 6.1. Теория вероятности.

Содержание темы

Элементы комбинаторики, виды комбинаций, события их виды, вероятность событий и их свойства, вычисление вероятности событий.

7. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

№ темы	Вид внеаудиторной самостоятельной работы	Сроки выполнения (указывается номер недели)	Примерные нормы времени (час.)	Формы контроля
1.1	Тема.1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ВИД КОНТРОЛЯ. 1.Знать формулы сокращенного умножения: квадрат разности и суммы двух выражений, разность квадратов двух выражений и разность кубов двух выражений, сумма кубов двух выражений, куб суммы и куб разности двух выражений. 2.Виды разложения на множители. 3. Преобразование выражений.	1	4	Устный опрос
2.1	Тема 2. Производная функция. 1.Понятие производной. 2.Производные элементарных функций. 3.Понятие функции. 4.Простейшие свойства.	3	4	Доклад
3.1	Тема3. Решение систем. 1. Понятие и свойства линейной функции. 2.Графики элементарных функций	4	4	Устный опрос

№ темы	Вид внеаудиторной самостоятельной работы	Сроки выполнения (указывается номер недели)	Примерные нормы времени (час.)	Формы контроля
4.1	Тема 4. Неопределённый интеграл. 1. Свойства неопределенного интеграла. 2. Преобразование алгебраических функций. 3. Упрощение выражений.	6	4	Решение примеров.
4.2	Тема 4.2. Определённый интеграл. 1. Основные математические функции и их графики. 2. Преобразование графиков.	8	4	Доклад
5.1	Тема 5.1 Понятие комплексного числа. 1. Переход от алгебраической к тригонометрической форме комплексного числа.	10	4	Доклад

ЗАДАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Тема 1: Теория пределов

Цель: получить представление о свойствах непрерывных функций. Доклад по теме: Доказательство теоремы о свойствах пределов функций.

Самостоятельная работа: работа с литературой

Форма контроля: Доклад на уроке

Требования к докладу:

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

Тема 2: Дифференциальное исчисление

Цель: закрепить навыки по вычислению производных функций первого и второго порядков, по исследованию функций с помощью производной.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка контрольной работы

Виды заданий:

1. Найти производные функций
2. Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции
4. Исследовать функцию и построить график

Пример выполнения работы:

Обозначения: C – постоянная, x – аргумент, u , v , w – функции от x , имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

$$1. (u+v-w)' = u' + v' - w'$$

$$2. (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$3. (cv)' = c \cdot v'$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Примеры:

$$1. Y' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2 \cdot (x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$$

$$2. Y' = (2^x \cdot x^3)' = (2^x)' \cdot (x^3) + (2^x) \cdot (x^3)' = 2^x \ln 2 \cdot x^3 + 2^x \cdot 3x^2$$

$$3. Y' = \left(\frac{x^2}{2 - x^2}\right)' =$$

Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y=g(u)$, где $u=f(x)$.

Если функция $u=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , а функция $y=g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u=f(x)$, то сложная функция $y=g(f(x))$ в данной точке x имеет производную, которая находится по формуле

$$y' = g'(u) \cdot f'(x).$$

Пример:

$$y' = ((1+x^2)^5)' = 5 \cdot (1+x^2)^4 \cdot 2x$$

Приложение производной к исследованию функций.

Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и ускорение.

Касательная и нормаль к плоской кривой.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ Уравнение касательной к графику функции

$y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания $M(x_0; f(x_0))$, называется *нормалью* к кривой.

Возрастание и убывание функции.

Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Возрастание и убывание функции.

Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Максимум.

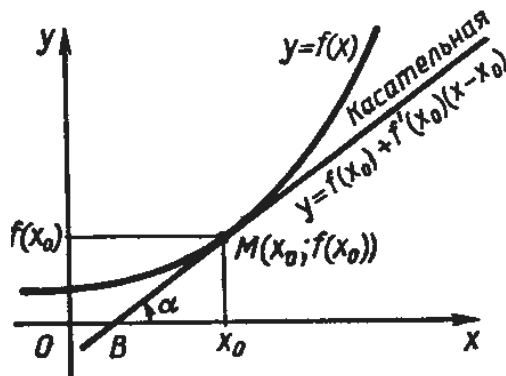
Функция $y=f(x)$ имеет максимум $x=a$, если при всех x , достаточно близких к a , выполняется неравенство $f(a) > f(x)$.

Признаки максимума:

1. $f'(a)=0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x=a$, меняет знак с «+» на «-».

Минимум.

$y=f(x)$ имеет минимум $x=a$, если при всех x , достаточно близких к a , выполняется неравенство $f(a) < f(x)$.



Признаки максимума:

3. $f'(a)=0$;
4. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x=a$, меняет знак с «-» на «+».

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке.

При решении этой задачи возможны два случая:

- 1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;
- 2) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается на концах отрезка $[a;b]$.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции:

1. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку $[a;b]$, и вычислить значения функции в этих точках.
2. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a;b]$, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$.
3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a;b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Например. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3 \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Решение:

1. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-1; 2)$ и значения функции в этих точках:

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2; 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0; 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0;$$

$$x^1 = 0, x^2 = 1, x^3 = 3.$$

Критическая точка $x^3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

2. Вычисляем значения функции в двух других критических точках:

$$y(0) = 3, y(1) = 4.$$

3. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка:

$$y(-1) = -8, y(2) = -5.$$

4. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что

$$\max_{[-1,2]} y = y(1) = 4, \quad \min_{[-1,2]} y = y(-1) = -8.$$

Исследование функций и построение их графиков.

Схема исследования функции и построения её графика:

- 1) найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются;
- 2) исследовать функцию на четность и нечетность;
- 3) исследовать функцию на периодичность;
- 4) определить точки пересечения с осями координат, если это возможно;
- 5) найти критические точки функции;
- 6) определить промежутки монотонности и экстремумы функции;
- 7) определить промежутки вогнутости и выпуклости кривой и найти точки перегиба;
- 8) найти асимптоты графика функции;
- 9) используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой; иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Например. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить её график.

Решение:

- 1) функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3$, функция не является ни четной, ни нечетной;
- 3) функция не является периодической;
- 4) найдем точку пересечения графика с осью OY : полагая $x = 0$, получим $y = -3$; точки пересечения графика с осью OX в данном случае найти затруднительно.
- 5) найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; найдем критические точки $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, получим $x = 1$ и $x = 3$ – критические точки.
- 6) в промежутках $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ $y' > 0$, функция возрастает; в



промежутке $(1; 3)$ $y' < 0$, функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус,

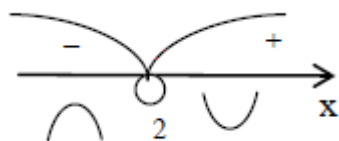
а при переходе через точку $x = 3$ – с минуса на плюс. Значит

$$y_{\max} = y(1) = 1, y_{\min} = y(3) = -3.$$

- 7) найдем вторую производную $y'' = 6x - 12$, $y'' = 0$, $6x - 12 = 0$, $x = 2$; в промежутке $(-\infty;$

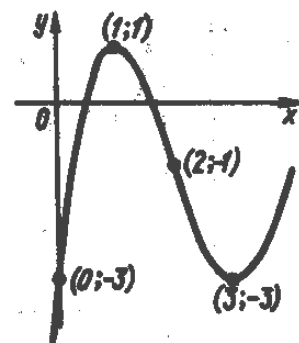
2) $y'' < 0$, кривая выпукла вверх,

в промежутке $(2; +\infty)$ $y'' > 0$, кривая выпукла вниз.



Получаем точку перегиба $(2; -1)$. 8) график функции
асимптот не имеет;

9) используя полученные данные, строим искомый график.



Индивидуальная контрольная работа

1 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = \cos^3(x^2 + 8)$; б) $f(x) = \frac{3x^3}{4x - 2}$; в) $f(x) = \sin^3(4x^2 + 3x - 8)$;

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x - x^3$

2 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = 3(x^5 + 7x^3 + 1)^4$; б) $f(x) = \frac{3^x - 1}{x^3}$; в) $f(x) = 4\ln(x^6 + 5) - 5x + 2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = x^3 - 12x$

3 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = 3(5x^2 - x + 4)^6$; б) $f(x) = 2\ln(x^6 + 5)$; в) $f(x) = \cos^4(4x - x^2)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

4 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = \operatorname{tg}^4(x - x^2)$; б) $f(x) = 3^{\cos 5x + 2}$; в) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

$$f(x) = 5x - x^3$$

5 вариант.

1. Найти производную функции:

a) $f(x) = \sin^3(x-3)$; б) $f(x) = (x^2-1) \cdot (x+3)$; в) $f(x) = 3^{\cos 5x+2}$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= x^3 - 3x - 1$$

6 вариант.

1. Найти производную функции:

a) $f(x) = 6(x^2 + 4x^3 + 12)^4$; б) $f(x) = \ln(x^3 - 4x)$; в) $f(x) = \frac{4x^3}{x-2}$.

6. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= 2 + x^3$$

7 вариант.

1. Найти производную функции:

a) $f(x) = \cos^2(x^2 + x - 1)$; б) $f(x) = 2^{\sin 3x+2}$; в) $f(x) = \sin^3(x-3)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= 1 + 4x - x^3$$

8 вариант.

1. Найти производную функции:

a) $f(x) = (2x^6 + 3x^4 + 1)^4$; б) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$; в) б) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x+3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= x^3 - x + 3$$

9 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = (x^3 - 6)(x + 4)^2$; б) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$ в) $f(x) = \sin^3(4x^2 + 3x - 8)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= 4x^3 - 6x^2$$

10 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = \sin(x^2 + 5)$; б) $f(x) = \frac{x^3 + 10}{x^3}$ в) $f(x) = 4\ln(x^6 + 5) - 5x + 2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)$

$$= 3x^2 - x^3$$

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, построен график функции верно, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, построен график функции верно, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но исследование функции проведено верно, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Тема 3: Интегральное исчисление

Цель: закрепить навыки по вычислению интегралов различными способами.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Виды заданий:

1. Вычислить неопределенный интеграл
2. Вычислить определенный интеграл
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси.

Пример выполнения работы:

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть $y = F(x)$ имеет производную $y' = f(x)$, тогда ее дифференциал

$$dy = f(x) dx$$

Функция $F(x)$ по отношению к ее дифференциалу $f(x) dx$ называется **первообразной**.

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть $F(x)$ - первообразная для дифференциала $f(x) dx$.

Тогда:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x), \text{ где } C - \text{ постоянная.}$$

Определение: совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для дифференциала $f(x) dx$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x) dx$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ где } f(x) dx - \text{ подынтегральное выражение.}$$

C- постоянная интегрирования. Процесс нахождения первообразной называется интегрированием.

Формулы

интегрирования

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int dx = x + c$ | 11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c$ |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ | 12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + c$ |
| 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ | 14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ |
| 6. $\int e^x dx = e^x + c$ | 16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + c$ |
| 8. $\int \cos x dx = \sin x + c$ | 18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ | 19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$ |
| 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$ | 20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right + c$ |

Непосредственное интегрирование.

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

Интегрирование методом подстановки.

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

- 1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;
- 2) найти дифференциал от обеих частей замены;
- 3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
- 4) найти полученный табличный интеграл;
- 5) сделать обратную замену.

2. Определенный интеграл.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x=a$, $x=b$, снизу отрезком $[a; b]$ Ох

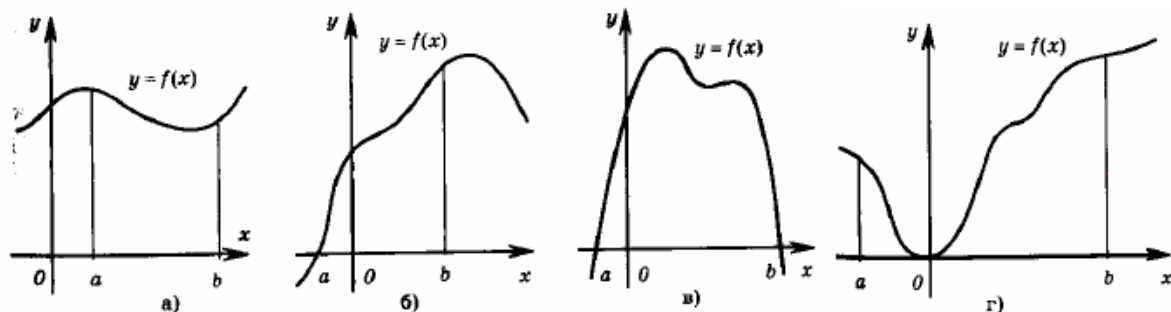
3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *a – z*.

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е.

абсциссы точек пересечения графиков

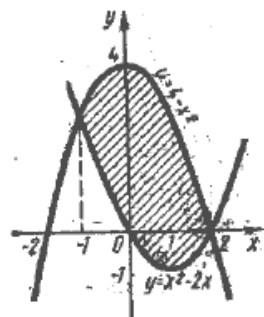
функций $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Для этого

решим систему
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Имеем $4 - x^2 = x^2 - 2x$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x_1 = -1, x_2 = 2$$



Искомую площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = 4 \int_{-1}^2 dx - 2 \int_{-1}^2 x^2 dx + 2 \int_{-1}^2 x dx = \\ &= 4x \Big|_{-1}^2 - 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9 \end{aligned}$$

$S = 9$ кв.ед.

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$1. \int (4x^2 + 4x -) dx$$

$$2. \int \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt{x}} dx$$

$$3. \int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{5 - 2t^3}}$$

$$4. \int \frac{1 - 6x + 4x^2}{x^2} dx$$

$$5. \int 3^{2+x^2} x dx$$

$$6. \int \frac{5 - \sqrt[3]{x^2}}{x} dx$$

$$7. \int x \cdot 2^{x^2} dx$$

$$8. \int \frac{x^{-\frac{1}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9. \int \sqrt[4]{(2 - \sin[x])^3} \cos x dx$$

$$10. \int \left(\left[\frac{x}{3} \right] - \frac{3}{x} + 5e^x \right) dx$$

$$11. \int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{x^2 \sqrt{x^2}} dx$$

$$12. \int \frac{x\sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$13. \int \left(\left[(9x^8) \right] - 3e^x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$16. \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}}$$

$$17. \int (3x^5 - \cos[x - 1]) dx$$

$$18. \int \left(\left[\frac{2}{\cos^2 x} \right] - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$19. \int \left(\left[(2^x) \right] - 3e^x + x \right) dx$$

$$20. \int \frac{x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$21. \int \left(\left[\frac{1}{5 \cos^2 x} - \frac{x}{2} \right] + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$22. \int \frac{3x^2 dx}{(2 - x^3)^4}$$

$$23. \int \left(\left[2 - \frac{1}{3 \sin^2 x} \right] - x^2 \right) dx$$

$$24. \int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}} dx$$

$$25. \int (5^x - 1)(5^{-x} + 1) dx$$

$$26. \int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$$

$$27. \int \cos^4 x \sin x dx$$

$$28. \int \frac{7 + 2x \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$14. \int (3x^3 - 4)^2 x^2 dx$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{1 + x^3}$$

$$29. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}}$$

2. Найдите определенные интегралы:

$$1. \int_1^8 \left[\left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) \right] dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$$

$$3. \int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(2 - \cos x)^2}$$

$$5. \int_0^8 \left[\left(\sqrt{2x} \right) + \sqrt[3]{x} \right] dx$$

$$6. \int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin [x]) dx$$

$$8. \int_0^4 (1 - \sqrt{x})^2 dx$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2 \sin [x])^3 \cos x dx$$

$$10. \int_1^2 \frac{1-x^6}{x^5} dx$$

$$11. \int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$16. \int_6^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 36}$$

$$17. \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

$$18. \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 \cos^2 x}$$

$$20. \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$21. \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x}) dx$$

$$22. \int_{\frac{2}{3}}^0 (4+6x)^3 dx$$

$$23. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$24. \int_0^1 (5-2x^3) x^2 dx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+5 \sin x} \cos x dx$$

$$26. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(1+15x^2)^3}}$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8 - 7 \sin x)^2}}$$

$$27. \int_1^3 2e^{2x} dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3 + 1}}$$

$$28. \int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left[\left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \right] dx$$

$$29. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1 + 2x^3}$$

$$30. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y = 3x - 1, y = 0, x = 2, x = 4$$

$$2) x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$$

$$3) y = -\frac{1}{3}x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 3$$

$$4) y = 9 - x^2, y = 0$$

$$5) y = 4x - x^2, y = 0$$

$$6) y = x^2 - 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 3$$

$$7) y = x^2, 5x - y - 6 = 0$$

$$8) y = x^2, x = y^2$$

$$9) y = \quad, y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$10) y = -x^2 + 6, y = 2x + 3$$

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными линиями:

3)

$$1) \quad = 6x, y = 0, x = 1, x = 3$$

$$y^2 = 4(x - 2), y = 0, x = 3, x = 6$$

2)

$$3) y = x^2 - 4, x = 0$$

$$4) y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$$

$$5) \quad = 4x, y = x$$

$$6) y = 4 - x^2, x - y + 2 = 0$$

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y = x^2, y = 1, y = 4, x = 0$$

$$2) y = x^2 + 1, y = 5$$

$$3) \quad = 9x, y = 3x$$

$$4) \quad = 2x, 2x + 2y - 3 = 0$$

Тема 4: Вычисление определителей

Цель: закрепить навыки по вычислению определителей второго, третьего и высших порядков.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Виды заданий:

5. Вычислить определитель второго порядка
6. Вычислить определитель третьего порядка
7. Вычислить определитель высших порядков

8. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel

Пример выполнения работы:

1. Вычислить определитель второго порядка

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Пример: вычислить определитель второго порядка

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8$$

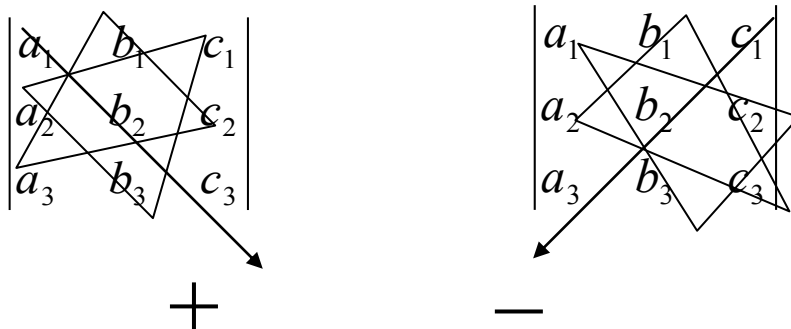
$$2) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

Пример: Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 5 = \\ = 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

3. Вычислить определитель высшего порядка

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется **минором** элемента a_{ij} . Обозначается минор – M_{ij} .

Пример: Найти минор элемента a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad - \text{ алгебраическое дополнение}$$

ТЕОРЕМА: Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Пример: Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1)^{1+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -2$$

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	1) а) $D = \begin{vmatrix} -7,2 & 3 \\ 8,1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	1) а) $D = \begin{vmatrix} -4 & 3,9 \\ 7 & 6,2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
3	1) а) $D = \begin{vmatrix} -7,8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
4	1) а) $D = \begin{vmatrix} 3,8 & -4,1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
5	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4,9 & -3 \\ 1,7 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

6	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4,7 & -8 \\ 3,2 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
7	1) а) $D = \begin{vmatrix} 7 & -3,4 \\ 6 & -4,2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
8	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8,3 & -6 \\ 2,7 & -4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
9	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4,8 & -7 \\ 2,4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$
10	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8 & -4,6 \\ 9 & -2,9 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Тема 5: Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель: закрепить навыки по решению систем методом Крамера и методом Гаусса.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Виды заданий:

1. Решить систему методом Крамера
2. Решить систему методом Гаусса
3. Выполнить проверку с помощью программы MS Excel

Пример выполнения работы:

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, \dots, b_n – столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда решением системы является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение
2. Если $D = Dx_1 = Dx_2 = \dots = Dx_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если $D = 0$, но хотя бы один из Dx_1, Dx_2, \dots, Dx_n не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Вычислим все определители:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Отсюда $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{5}$

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Вычислим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \quad Dx_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 4 \quad Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{4}{4} = 1 \quad x_3 = \frac{0}{4} = 0$$

Ответ: $x_1=3/2, x_2=1, x_3=0$.

Индивидуальная контрольная работа:

Вариант	Задание
1	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>а) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>б) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = -10 \\ x + 3y - 3z = 13 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$</p> </div> </div>

2	$\text{a) } \begin{cases} -x+3y+2z=4 \\ 2x-y+3z=6 \\ -2x+2y-z=8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x-y+z=-4 \\ x+2y-3z=9 \\ 2x-2y+2z=7 \end{cases}$
3	$\text{a) } \begin{cases} 3x-y+2z=-5 \\ 2x+2y-3z=1 \\ x-2y+z=6 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+2y-z=11 \\ 2x-3y+2z=-2 \end{cases}$
4	$\text{a) } \begin{cases} x-3y+z=-7 \\ 2x+y-2z=4 \\ -2x+2y-3z=2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x-2y+2z=-4 \\ 2x+y-2z=-1 \end{cases}$
5	$\text{a) } \begin{cases} x+3y-z=8 \\ 2x-y+4z=-1 \\ -2x+2y+z=4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x+4y-z=5 \\ 2x-2y+3z=-3 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$
6	$\text{a) } \begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ -x+2y+z=-6 \\ 3x+y-2z=12 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x+2y-4z=7 \\ 2x+y+2z=-1 \end{cases}$
7	$\text{a) } \begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ x-2y+z=-3 \\ x+3y-z=6 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x-2y+z=8 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$
8	$\text{a) } \begin{cases} 4x-y+z=6 \\ x+2y-2z=-3 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-y+3z=4 \\ -2x+2y-z=-7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$
9	$\text{a) } \begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ 3x+y-2z=7 \\ -x+2y+z=4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+2y-z=9 \\ -2x-3y+z=-5 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$
10	$\text{a) } \begin{cases} 2x-y+3z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3x-y+2z=7 \\ -x+3y-2z=5 \end{cases}$

Тема 6: Представление комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель: научиться переводить комплексные числа из алгебраической в тригонометрическую и показательную формы.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа. Работа с литературой.

Форма контроля: проверка индивидуальной домашней работы.

Виды заданий:

1. Представить числа в тригонометрической форме.
2. Представить числа в показательной форме.

Теоретический материал. Пример выполнения работы

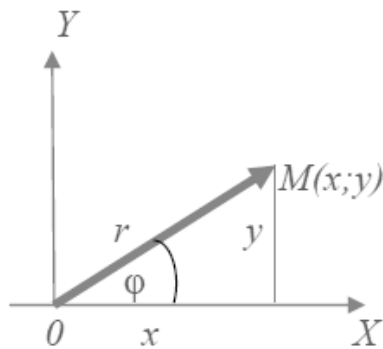
Число вида $z = x + i y$, где x и y – любые действительные числа,

а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется комплексным числом.

Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Запись комплексного числа в виде $z = x + i y$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $z = x + i y$ может быть изображено в декартовой координатной плоскости XOY либо точкой с абсциссой x и ординатой y , либо радиус-вектором этой точки:



Длина этого вектора называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r :

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол, образованный этим вектором с положительным направлением

действительной оси Ox , называется **аргументом** числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена с точностью до числа, кратного.

Значение $\operatorname{Arg} z$, заключенное в пределах от $-\pi$ до π , называется **главным** и

обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ : $-\pi < \arg z \leq \pi, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Два комплексных числа $z = x + i y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Два комплексных числа $z = x + i y$ и $\bar{z} = x - i y$, отличаются только знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа $z = x + i y$ имеют вид:

$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z = r e^{i\varphi}$, где r и φ - соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z .

Пример.

Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Решение:

1) Находим модуль комплексного числа:

$$|z| = r = |3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

2) Находим главное значение аргумента комплексного числа z :

Так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ то } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) Находим тригонометрическую форму: $z = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$

Находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$

Задания для самостоятельной работы

Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1	$1-i$	$-1-i$	$-2+2i$	$-2-i$
2	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}i$	$-\sqrt{6}-2i$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}i$
3	$-\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$	$\sqrt{6}+\sqrt{3}i$	$-\sqrt{3}+\sqrt{2}i$
4	$5+4i$	$-3+2i$	$5-2i$	$-5+2i$

Тема 7: Элементы теории вероятности и математической статистики.

Цель: получить представление о науке «Комбинаторика», о ее целях и задачах, о зарождении теории вероятности.

Самостоятельная работа: работа с литературой

Форма контроля: доклад на уроке

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Нормативные документы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего профессионального образования по специальности 40.02.01 – Право и организация социального обеспечения.

2. Федеральный закон РФ от 29.12.20013года №273-ФЗ «Об образовании».

3. Рабочий учебный план специальности 40.02.01 – Право и организация социального обеспечения.

Основная литература:

1. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование) [Электронный ресурс](#).
2. Ю.М. Данилов, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Математика: Учебное пособие / - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 496 с. [Электронный ресурс](#).

Дополнительная литература

1. Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебник. – М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2012.
2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. -11-е изд., стер. –М.: Мнемозина, 2013.-399 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) /[А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича.-10-е изд., стер.-М.: Мнемозина,2012.-239 с.

Интернет-ресурсы:

1. Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии – научный журнал: <http://num-meth.srcc.msu.su/>.
2. Журнал Полином / Математическое образование: прошлое и настоящее: <http://www.mathedu.ru/e-journal/>.
3. КВАНТ – физико-математический научно-популярный журнал для школьников и студентов: <http://www.kvant.info/>.
4. Учебная физико-математическая библиотека – EqWorld: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>.
5. Графики функций [http:// graphfunk .narod.ru](http://graphfunk.narod.ru)

Периодические издания:

1. Журнал «Мир ПК».
2. Газета «Математика. Первое сентября».